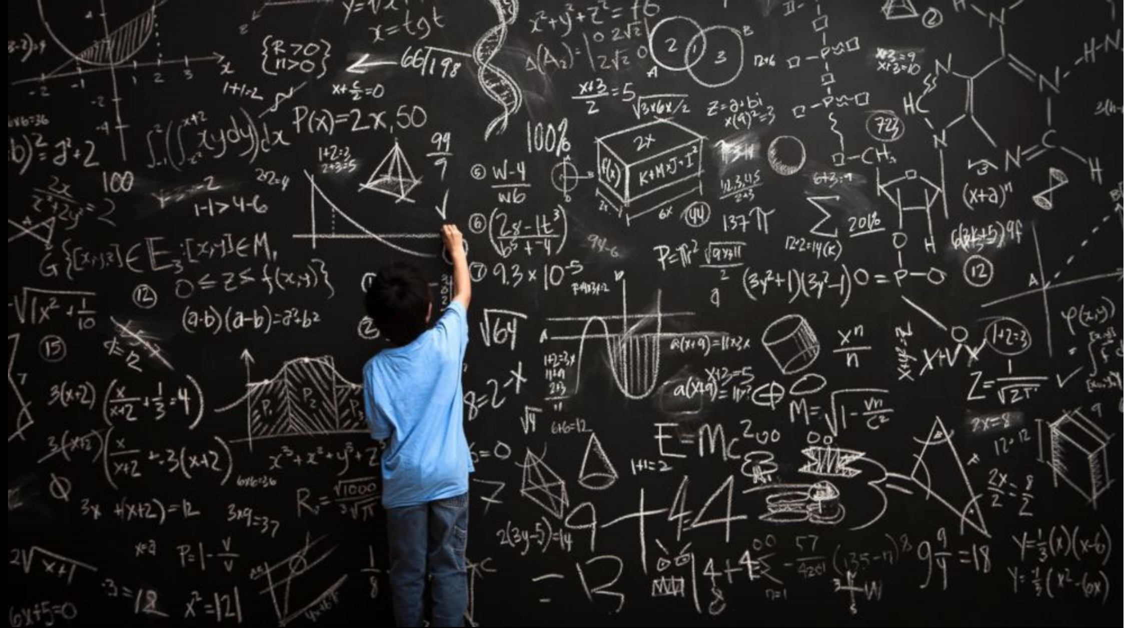


Vejlederdag, DMN SYD, 26. april, 2023

Thomas Kaas

TIDLIG ALGEBRA

PLAN

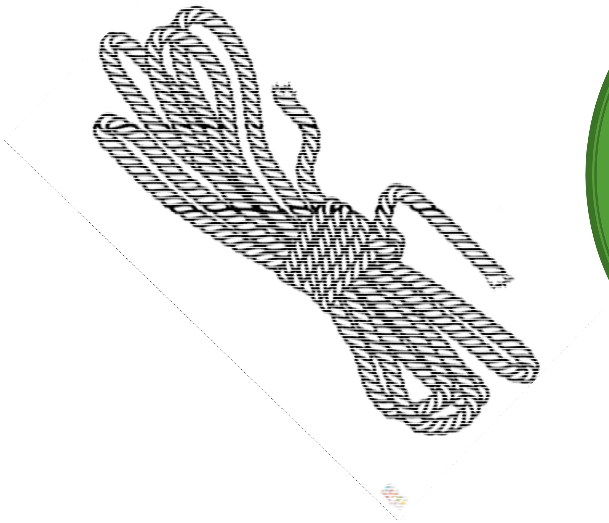
1) Ideen med tidlig algebra

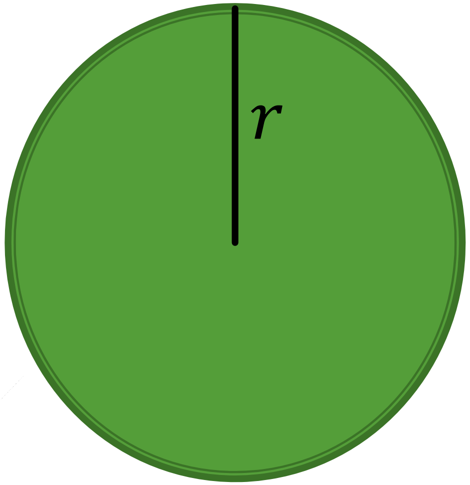
2) Et undervisningsforsøg med ti... ra

3) Og hvad kan man så ...

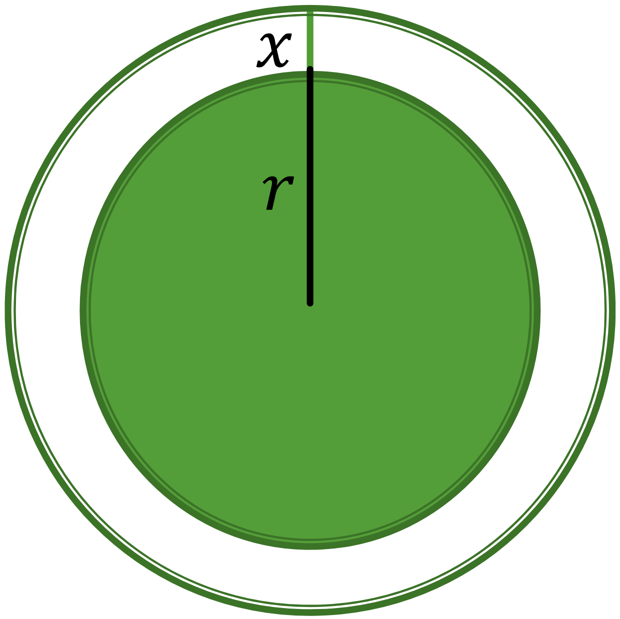
HVAD er tidlig algebra?
HVORFOR undervise i tidlig algebra?
HVORDAN undervise i tidlig algebra?

ET KLIP OM NOGET ALGEBRA





$$2 \cdot \pi \cdot r$$



$$2 \cdot \pi \cdot r + 1 = 2 \cdot \pi \cdot (r + x)$$

OG HVAD SÅ...?

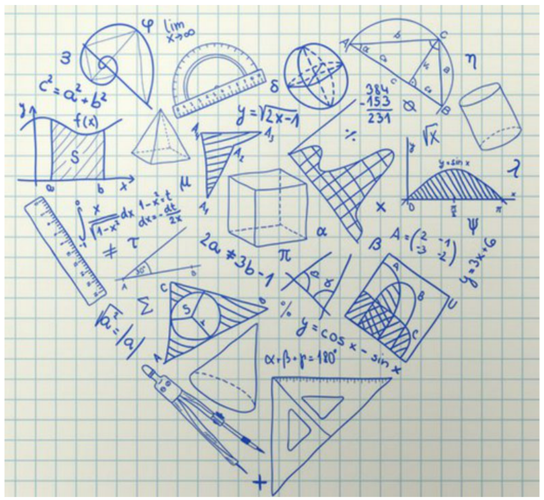
- 16 cm????
- Det generaliserede udtryk o[illegible]mme konklusion også gælde[illegible] tennisbold.
- Det havde jeg[illegible]det ud af uden algebra.
- Man ka[illegible]ippe omverden med algebra.

ALGEBRA ER ET STÆRKT VÆRKTØJ,
SOM ER HELT SÆRLIGT FOR MATEMATIK

SAGT PÆNT…

"Algebra er en nøgle til dybere forståelse af matematik som både videnskabsfag, anvendelsesfag og dannelsesfag."

(Jensen, 2000)



ET KLIP FRA 7. A

'Jeg kunne godt lide matematik i de små klasser. Dengang skulle vi mest alt det med plus, minus, gange og division… Nu forstår jeg det ikke længere. Pludselig er det helt anderledes og med bogstaver sammen med tallene.'

1.-6. klasse:

$199 + 123 = \_\_\_\_$

$201 - 179 = \_\_\_\_$

$12 \cdot 15 = \_\_\_\_\_\_$

$679 : 7 = \_\_\_\_\_\_$

7. klasse:

Jeg vidste ikke, det var blevet væk.

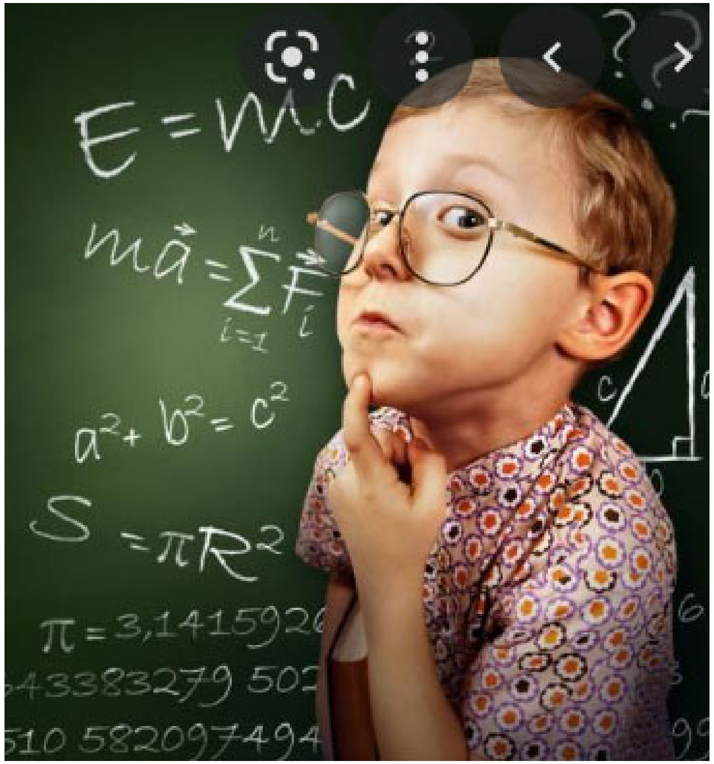
Find x.

$$15 + 2x = 45 - 3x$$

Det er jo lige der!

IDEEN OM TIDLIG ALGEBRA

Hvad nu, hvis eleverne i skolen arbejder med algebra helt fra begyndelsen?



SPØRGSMÅL TIL TIDLIG ALGEBRA

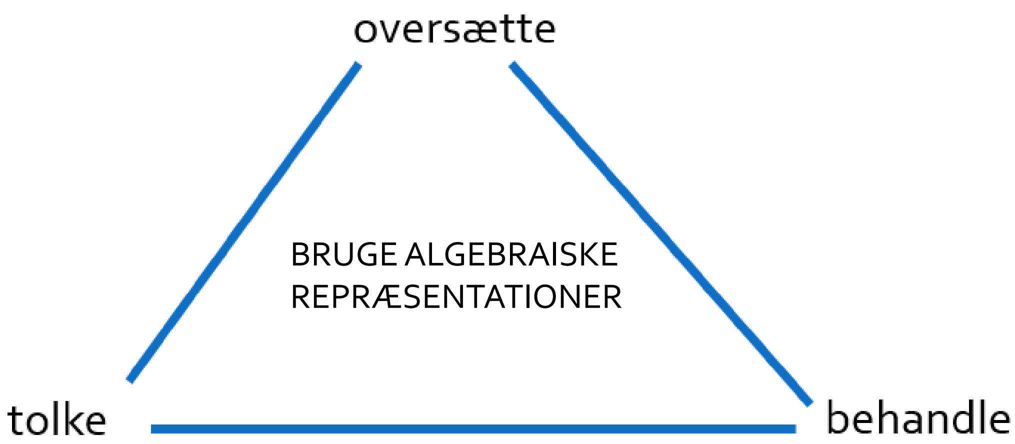
- Hvad kan børn i det hele taget lære inden for algebra på de yngste klassetrin?
- Hvilken rolle skal bogstavudtryk have i algebra på de yngste klassetrin?
- Og hvordan skal man undervise i det…?!

INSPIRATION (1)

Algebra er andet end bogstavudtryk.

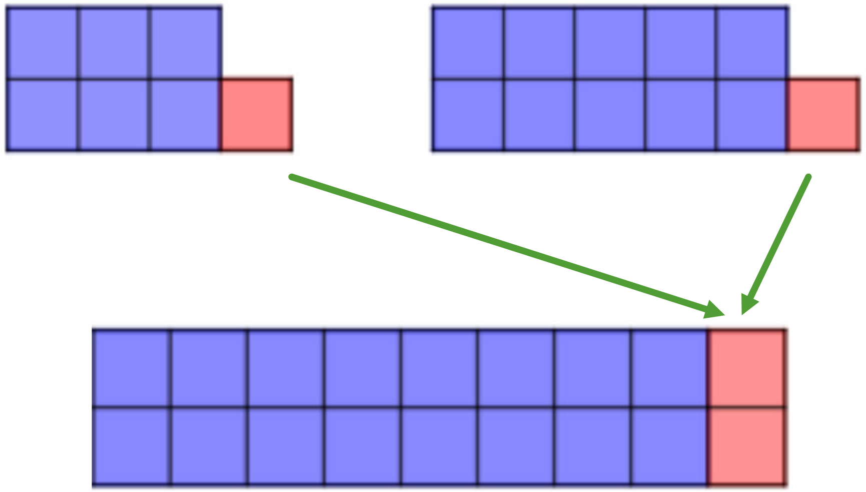
Det er også nogle bestemte måder at tænke på i situationer med ubestemte tal.

Før så vi et sæt af tænkemåder:

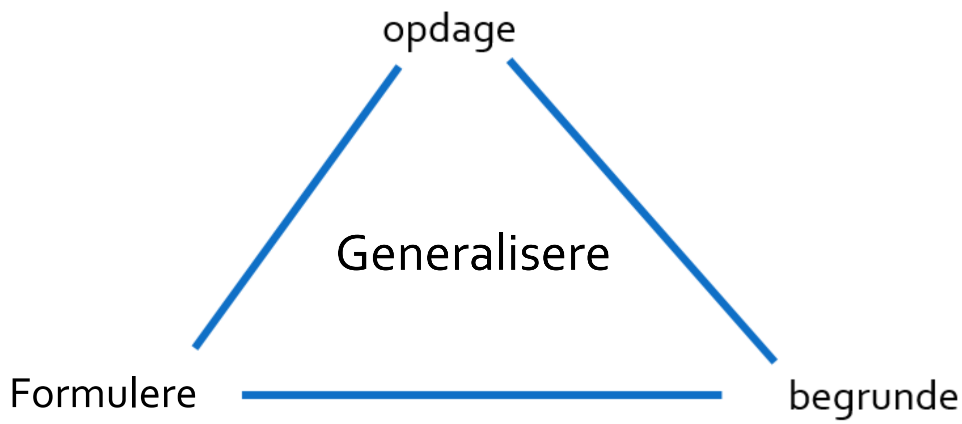


INSPIRATION (2)

Ulige plus ulige



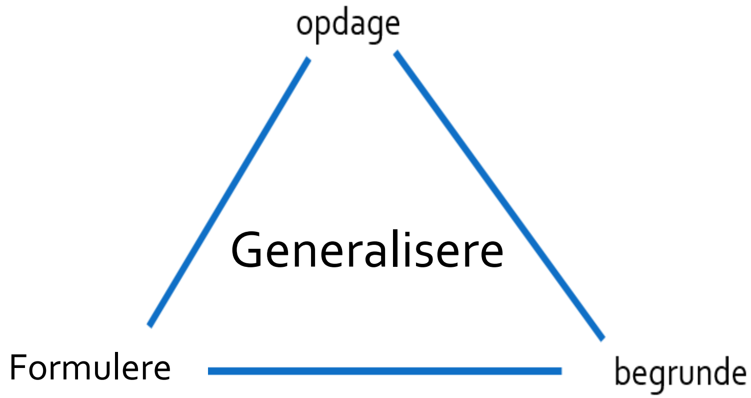
$$\boxed{(2n+1)+(2m+1)=2(n+m)+2}$$



INSPIRATION (3)

Dagens tal

8 + 0
7 + 1
6 + 2
5 + 3
4 + 4
3 + 5
2 + 6
1 + 7
0 + 8

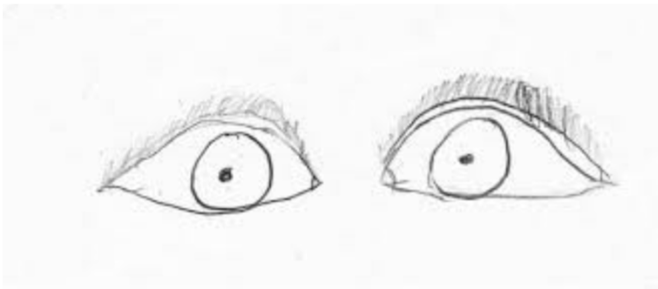


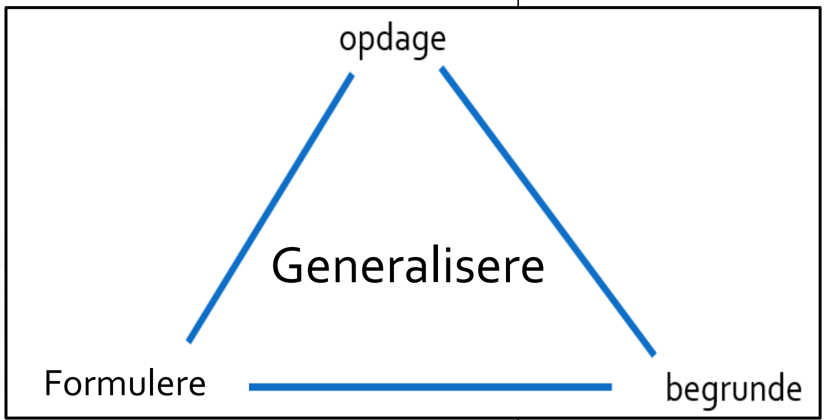
Hvis $a + b = c$, så gælder, at $(a - 1) + (b + 1) = c$

INSPIRATION (4)

Man kan begynde algebra med at se på (funktionelle) sammenhænge mellem tal.

Hvor mange øjne har 1 person?
Hvor mange øjne har 2 personer tilsammen?
3 personer?
10 personer?





Er der en måde, du kan bruge til at finde antallet af øjne, når du ved, hvor mange personer der er?

KORT OPSAMLING

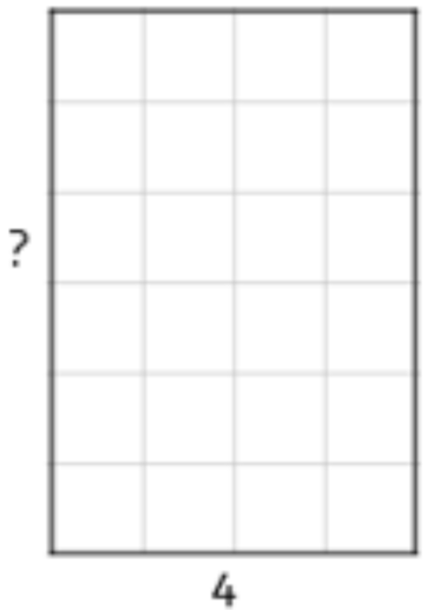
- Algebra er vigtigt…
- Men det er svært…
- Kan en tidlig begyndelse give bedre forståelse?
- Hvis vi begynder tidligt, skal vi nok tænke algebra på en ny måde.
- Vi skal nok i højere grad sigte på algebraisk tænkning end på bogstavregning.
- Måske er sammenhænge mellem tal en god start.

ET UNDERVISNINGSFORSØG

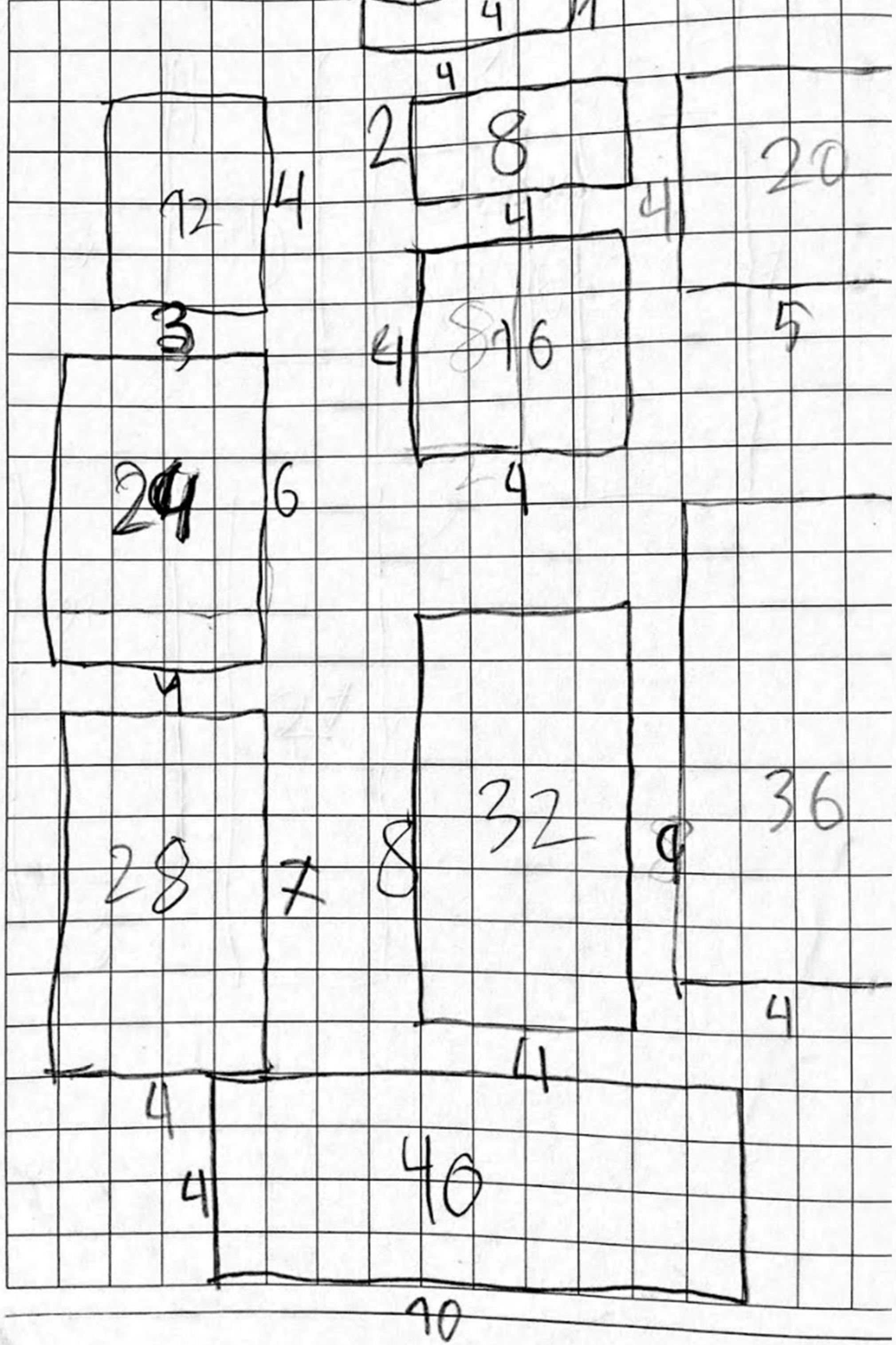
- Almindelig folkeskole
- 2. – 3. klasse
- Tre undervisningsforløb á 4 uger
- Ekspertlærer

EN START

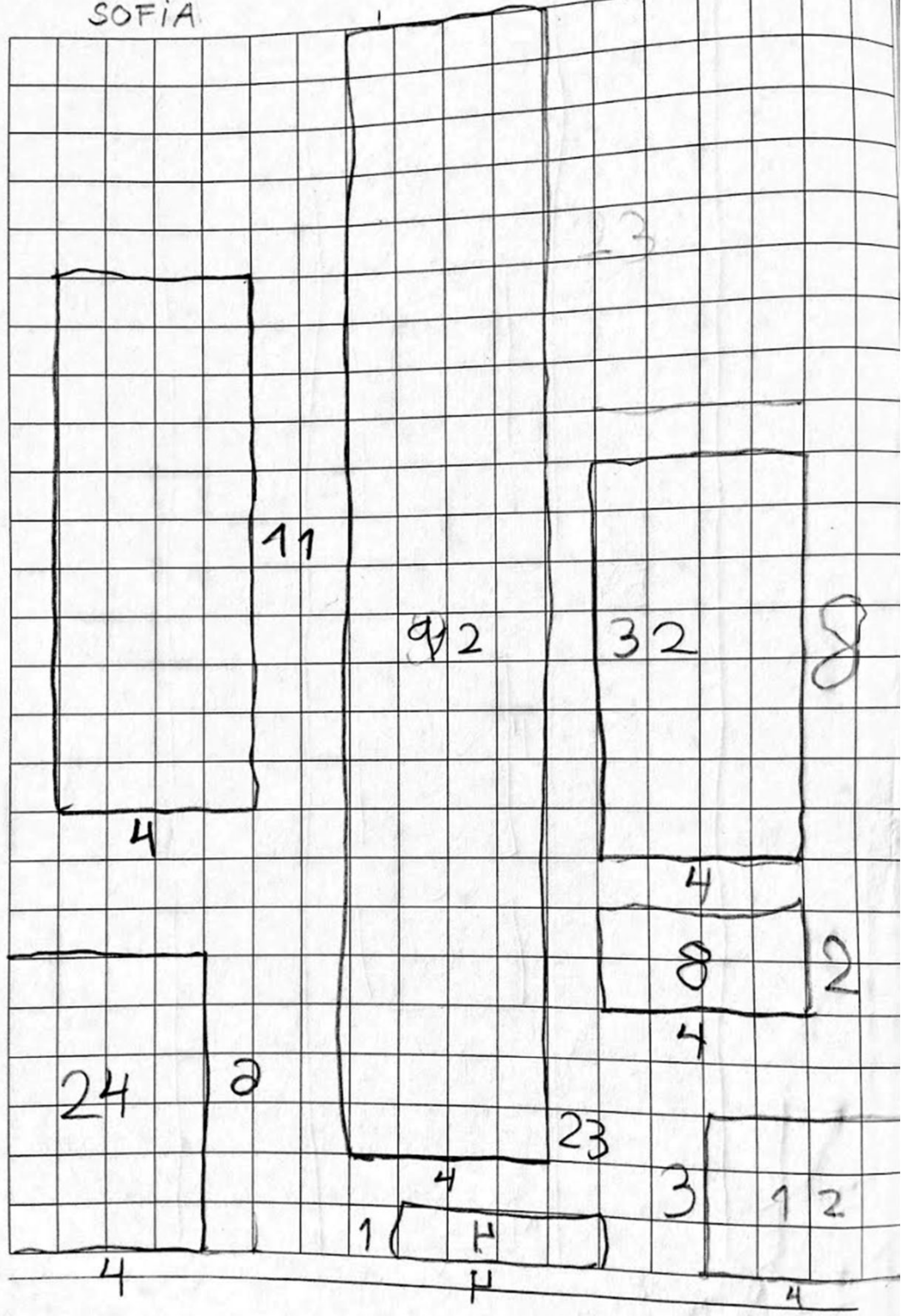
Tegn rektangler, der har en sidelængde på 4.
I bestemmer selv den anden sidelængde.
Hvor mange 'tern' kommer der i rektanglerne?



LUCA


4
1
4
2
8
12
4
4
20
3
4
16
5
24
6
4
32
8
36
28
7
4
4
40
4
40

SOFIA


23
11
92
32
8
4
4
8
2
4
24
2
23
4
3
12
1
4
4
4

LODRETTE SAMMENHÆNGE

Højde	Antal tern
10	40
6	24
20	80
5	20

Højde	Antal tern
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	

VANDRETTE SAMMENHÆNGE

Højde	Antal tern
10	40
6	24
20	80
5	20

Hvordan kan man regne sig frem til antal tern? Hvorfor?

Fx

6+6+6+6 eller $4 \cdot 6$

7+7+7+7 eller $4 \cdot 7$

8+8+8+8 eller $4 \cdot 8$

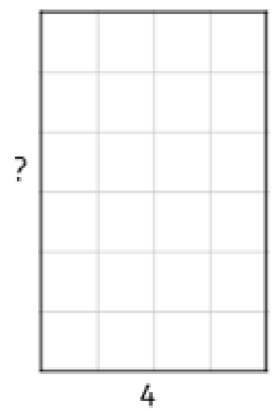
Kan I se et mønster?

Hvad hvis højden var 100?

GENERALISERE MED TAL OG ORD

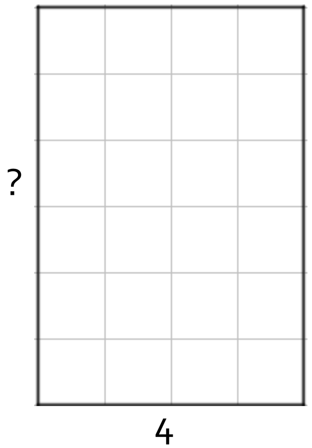
'Hvis højden er 100, så er der 100+100+100+100 tern.'

Forestil jer, at I skal forklare jeres dansklærer, hvordan hun kan regne ud, hvor mange tern der er, hvis hun kender højden. Hvad ville I sige?



SE jeg tegner ©2015

1. PRAKSIS



Hvor mange tern?

Højde	Antal tern
10	40
6	24
20	80
5	20

Hvordan fandt I ud af det?

Elevforslag

10+10+10+10 eller 4 x 10

6+6+6+6 eller 4 x 6

20+20+20+20 eller 4 x 20

5+5+5+5 eller 4 x 5

Kan I se et mønster?

?

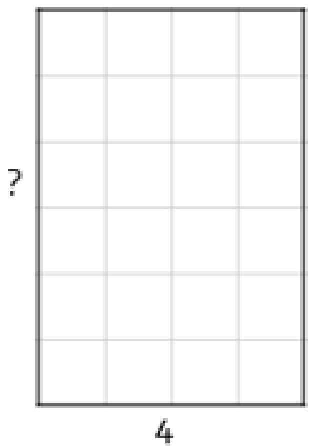
Hvordan kan I forklare 'reglen'?
Og hvorfor virker den?

Faktuelle og kontekstuelle generaliseringer

BOGSTAVER I 2. KLASSE?

Uheldige forsøg:

- Kan vi ikke bare kalde højden *h*…?



Højde	Antal tern
10	40
6	24
20	80
5	20

2. PRAKSIS

Hvordan kommer eleverne til at se mening i variabelnotation?

Min ven er 5 år ældre end jeg er.

I kan bruge dette udtryk til at finde ud af, hvor gammel min ven er, hvis I ved, hvor gammel jeg er: H + 5

Kan I skrive et udtryk, I kan bruge til at finde ud af, hvor gammel jeg er, når I ved, hvor gammel min ven er?

Hvor gammel var hun, da jeg var…

Hvor gammel var jeg, da hun var…

Hvordan regner I det ud?

Kan I få det udtryk til at give mening?

Hvad betyder H'et?

Hvorfor kan du bruge dit udtryk?

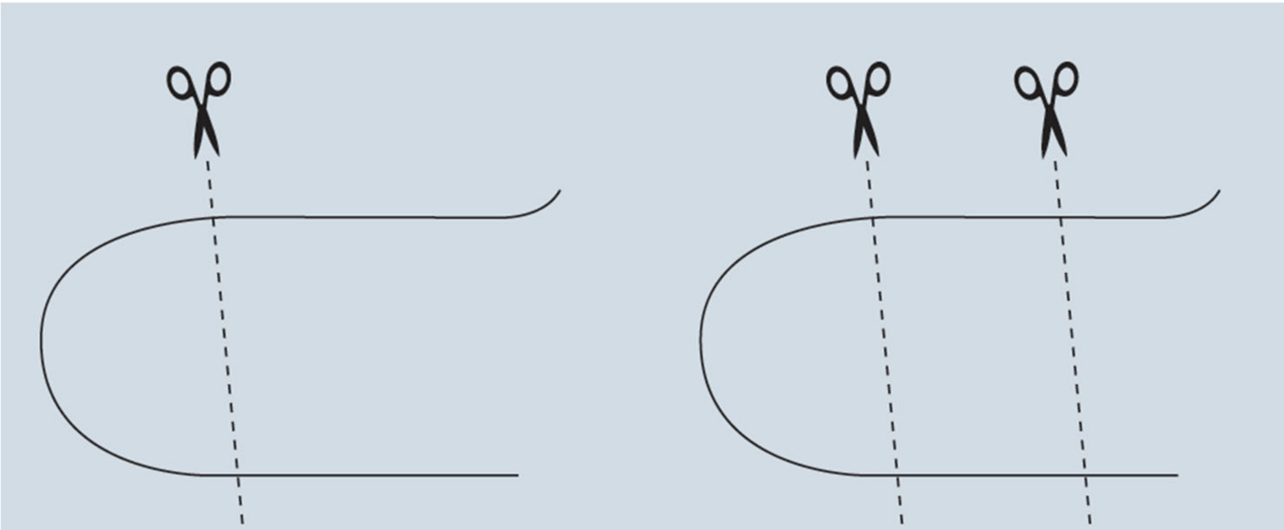
Vil du altid kunne bruge det?

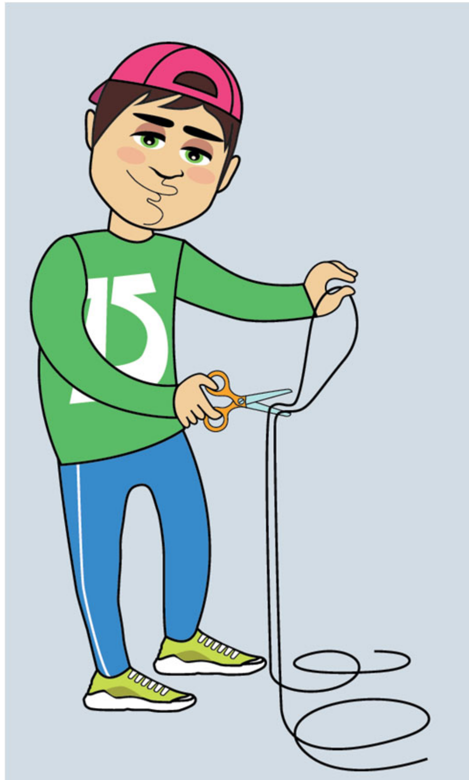
Oversættelser, der involverer variabelnotation

KLIP I EN SNOR MED EN BUE

Lav 1 bue med en snor, og klip 1 gang.
Hvor mange stykker snor får du nu?

Hvad hvis du klipper 2 gange? 3 gange?
100 gange? *n gange?*





ELEVARBEJDE (KLIP I EN SNOR)

Clara og Gustav J

MATEMATIK / Heidi matematiklære

antal snore: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41

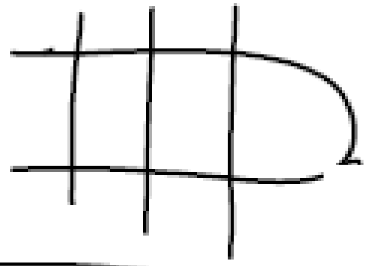
antal klip	antal snore
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

antal klip: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

K	S
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
2+61	13
7	15
8	17
9	19

$K \cdot 2 + 1 = S$

FÆLLESGØRELSE I 3. A



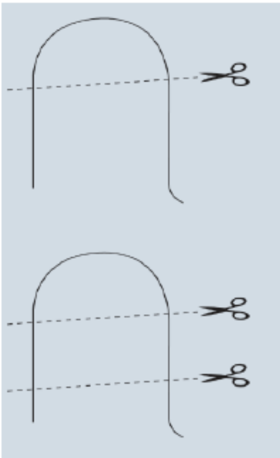
$$\boxed{k \cdot 2 + 1 = s}$$

Det dobbelte plus 1

k	s	
0	1	
1	3	1+2
2	5	2+3
3	7	3+4
4	9	
5	11	
6	13	

3. PRAKSIS

Trin 1



Hvor mange

Trin 2

Antal klip	Antal snore
0	1
1	3
2	5
3	7

Hvordan fandt I ud af det?

Trin 3

Elevforslag

$$3 \cdot 2 + 1 = 7$$
$$4 \cdot 2 + 1 = 9$$
$$5 \cdot 2 + 1 = 11$$

$$10 \cdot 2 + 1 = 21$$

Kan I se et mønster?

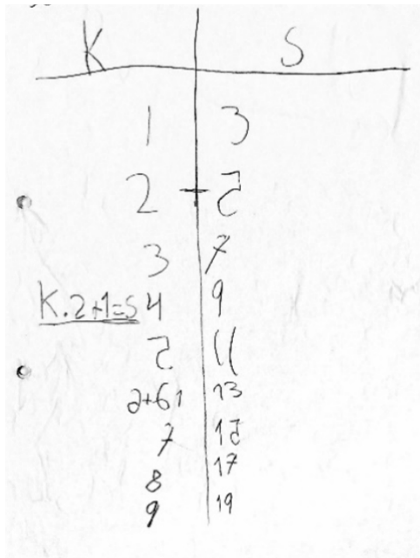
Trin 4

$$k * 2 + 1 = s$$

eller

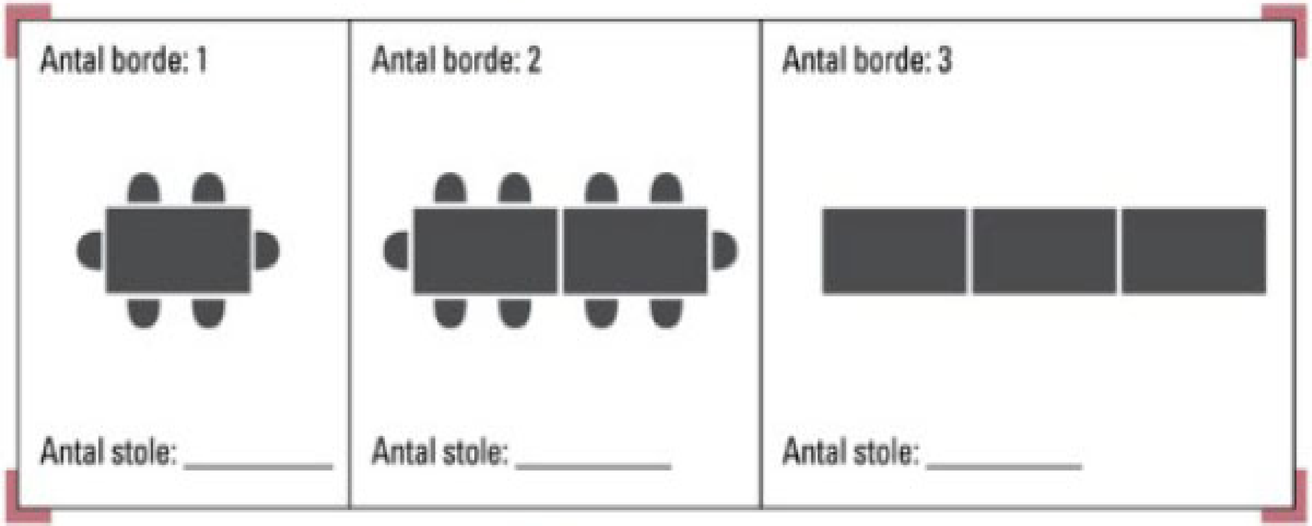
'Det dobbelte plus 1'

Hvordan kan I forklare 'reglen'? Og hvorfor virker den?

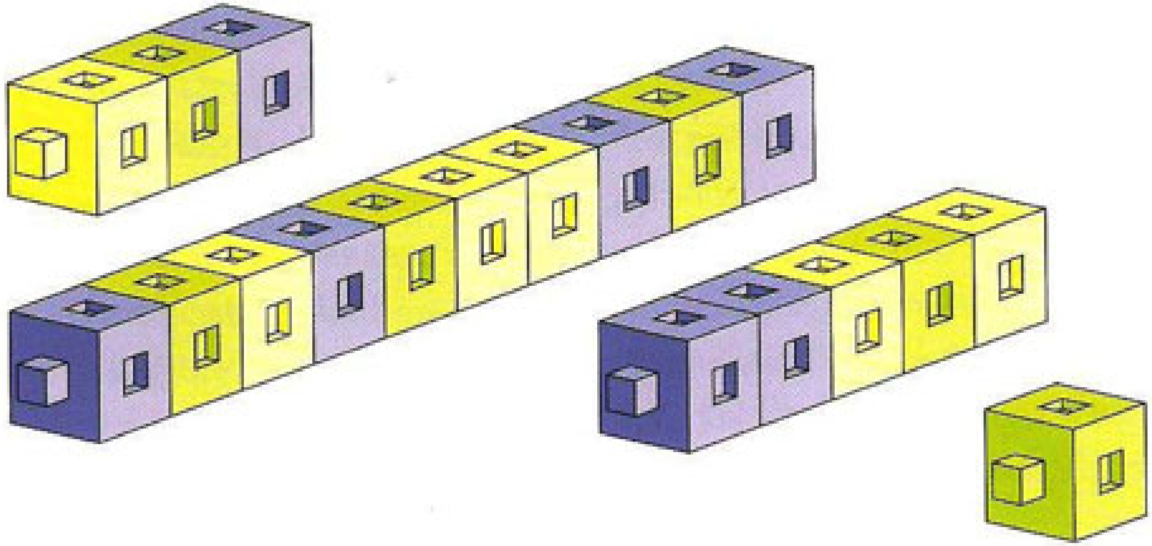


Generaliseringer, der involverer variabelnotation

ANDRE IDEER


Antal borde: 1
Antal stole: ________
Antal borde: 2
Antal stole: ________
Antal borde: 3
Antal stole: ________

ANDRE IDEER



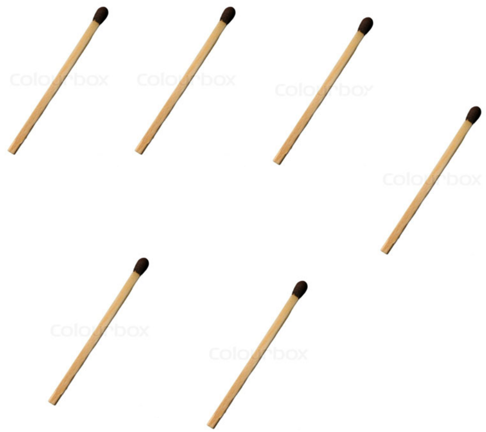
- Lav en stang af 5 centicubes. Hvad er overfladen?
- Hvad er overfladen af en stang lavet af 10 centicubes?
- Hvad er overfladen af en stang lavet af n centicubes?

TÆNDSTIKHEMMELIGHEDER (1)

Der er lige mange tændstikker i hver æske.
Der er lige mange tændstikker på hvert bord.
Hvor mange tændstikker ligger der i hver æske?

TÆNDSTIKHEMMELIGHEDER (2)

Hvilke strategier vil eleverne mon finde på?



TÆNDSTIKHEMMELIGHEDER (3)

Hvilke strategier vil eleverne mon finde på?

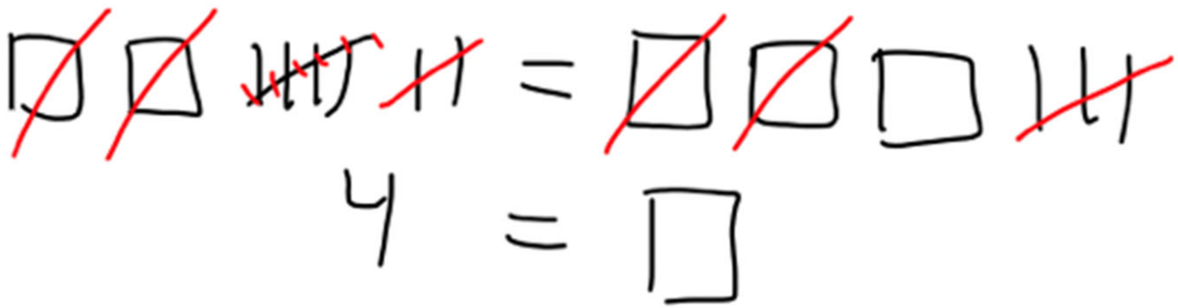
TÆNDSTIKHEMMELIGHEDER (4)

Hvilke strategier vil eleverne mon finde på?

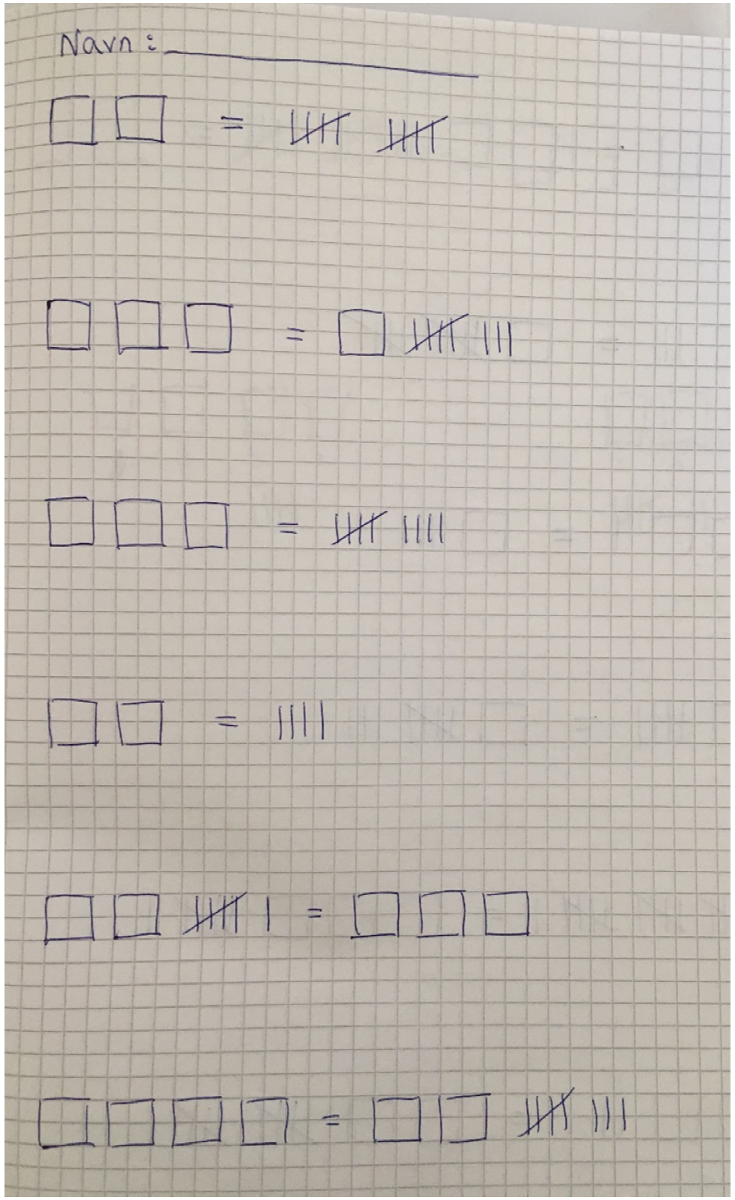
TÆNDSTIKHEMMELIGHEDER (5)

- Eksempel 1

- Eksempel 2



TÆNDSTIKHEMMELIGHEDER (6)



Navn: ____________

$x + x = 8$

$12 = 4 \cdot x$

$2 \cdot x = x + 5$

$x + 30 = 4 \cdot x$

$2 \cdot n + 4 = 22$

$3 \cdot x + 4 = x + 6$

$3 \cdot x = 9$

$4 \cdot x = 20$

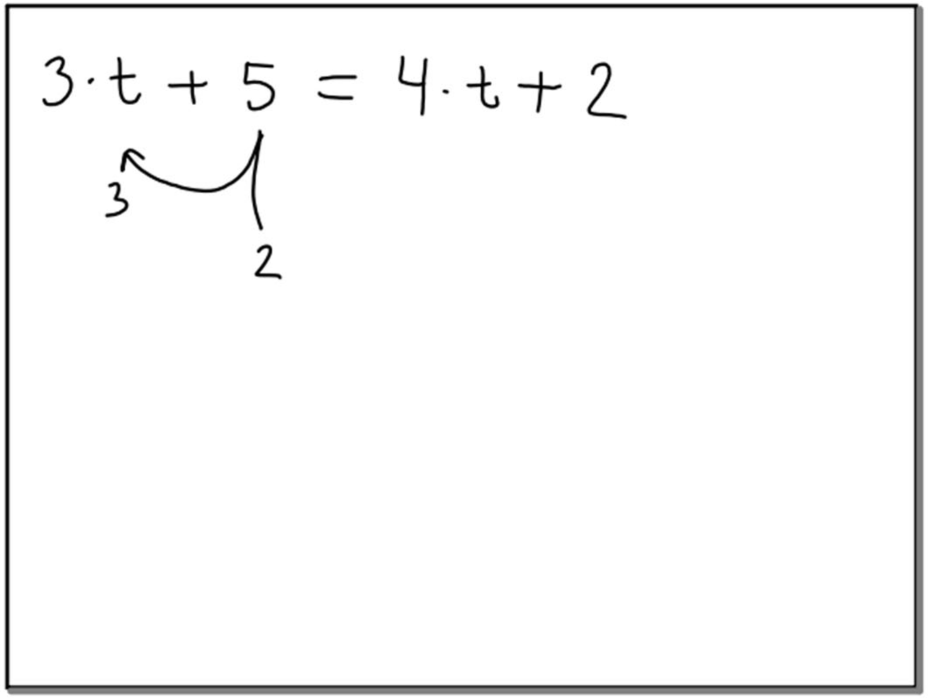
$x + x + x = x + 12$

$x + 8 = 3 \cdot x + 6$

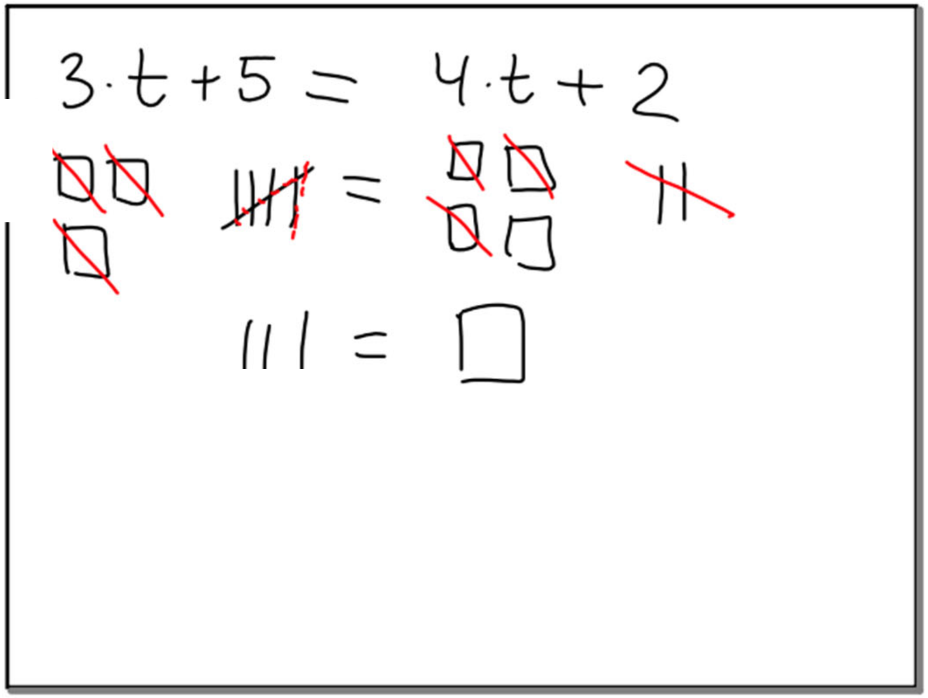
$3 \cdot a + 8 = 14$

$10 \cdot x + 2 = 8 \cdot x + 4$

Forskellige måder i 3. A.



Maja deler 5 op i 2 og 3 på venstre side, så 2 kan passe sammen med 2 på højre side. Hun sammenligner 4·t med 3·t og 3 og finder ud af, t = 3.



Oversæt til en tændstikhemmelighed og 'fjerne'.

HVAD OPDAGEDE VI?

- Hvad kan børn i det hele taget lære inden for algebra på de yngste klassetrin?
  Langt mere end vi hidtil har troet muligt.

- Hvilken rolle skal bogstavudtryk have i algebra på de yngste klassetrin?
  Bogstavudtryk kan leve side om side med mere uformelle måder at repræsentere på.

- Og hvordan…?!
  Med undervisning, hvor undersøgelse og fælles refleksion fylder langt mere, end det (nok) typisk gør i dag.

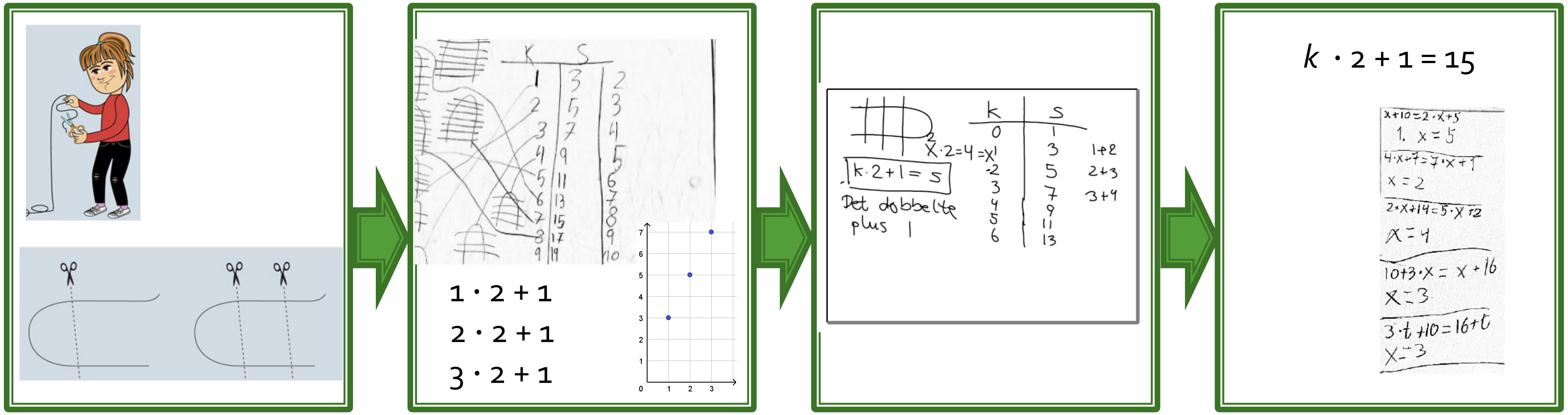
HVAD KAN LADE SIG GØRE?

Det kan lade sig gøre for 8-10-årige elever, at

- generalisere lineære sammenhænge ud fra funktionssituationer.
- skabe mening i brugen af variable og variabelnotation i forbindelse med lineære sammenhænge.
- anvende funktionstabeller, grafer og ligninger som redskaber til at løse algebraiske problemer og sammenligne lineære sammenhænge.

HVAD ER DET BÆRENDE?

- Læreren initierer skift i aktiviteten og introducerer nye måder at repræsentere på.
- De nye repræsentationer støtter eleverne til at tænke på nye måder om deres arbejde på forrige trin i progressionen.



Undersøgelse i kontekst

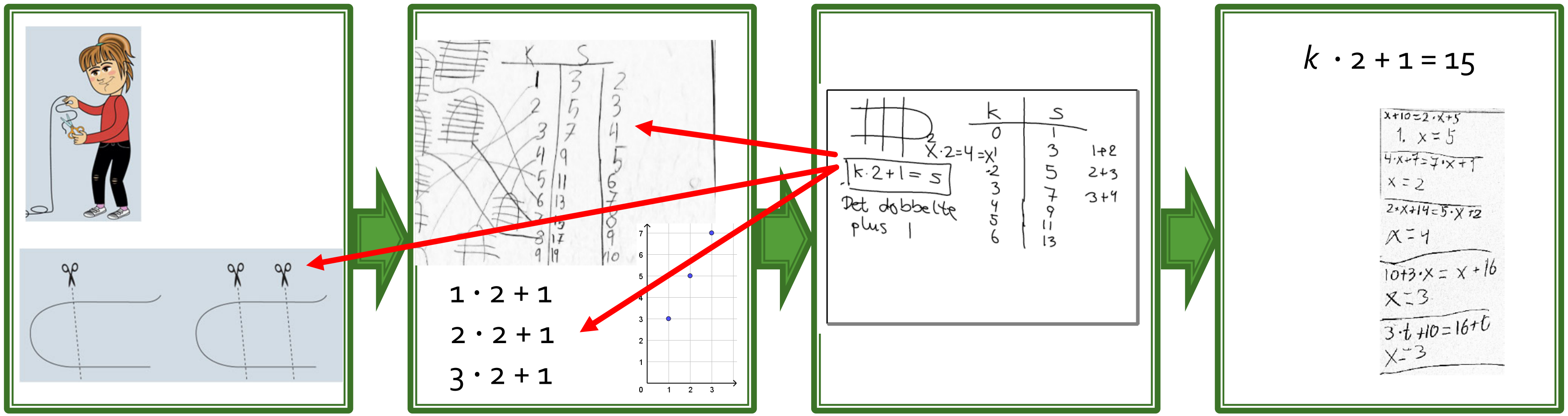
Refererende aktivitet

Generel aktivitet

Tænkning med konventionelle symboliseringer

SKABE MENING I BOGSTAVER?

- Ideen om bogstaver i matematik kommer ikke af sig selv. Læreren må introducere den ide.
- Eleverne får (med den progression) rige muligheder for at skabe mening i bogstavudtryk.



Undersøgelse i kontekst

Refererende aktivitet

Generel aktivitet

Tænkning med konventionelle symboliseringer

MEN HAR VI TRAVLT?

- Det interessante er, at børn kan lære algebra med mening med fx de tilgange, jeg har skitseret.

- Man kan lære algebra uden at have arbejdet i lang tid med tal og regning – de to ting kan følges ad.

- Pointen er ikke, at børn skal kunne meget mere hurtigere (!)

OG HVAD SÅ?

Give inspiration til

- praksis
- lærebøger
- læseplaner

Hvis noget skal ændres i praksis, kræver det matematikvejledere som drivkraft.

TAK FOR NU...